Les élèves en grande difficulté en maths : sont-ils dyscalculiques et peuvent-ils bénéficier d'une approche du calcul par tableaux et tableurs ?

M. VIGIER
Ingénieur ENSI, professeur de mathématiques, lycée professionnel P.A.-Chabanne, 16260 Chasseneuil.
E-mail : michel.vigier@ac-poitiers.fr

RÉSUMÉ : ***Les élèves en grande difficulté en maths : sont-ils dyscalculiques et peuvent-ils bénéficier d'une approche du calcul par tableaux et tableurs ?***
Les études de l'OCDE, portant sur les niveaux des élèves de 15 ans, dans les 56 pays adhérents ou associés, ne laissent pas apparaître une fréquence identique et significativement élevée d'adolescents en difficulté en calcul, dans tous les pays. Une telle observation n'étaye guère l'hypothèse qu'un dysfonctionnement neurologique – la dyscalculie – universellement et largement répandu, pourrait être à l'origine de ces difficultés.
Notre expérience d'enseignement, de 2000 à 2008, avec des sections de CAP, conduit à des observations que l'on peut interpréter de manière analogue. Ces sections « réservées » reçoivent principalement des élèves sortant de 3ème SEGPA en grande difficulté, notamment en calcul. Les résultats du suivi d'une classe confirment, sur des effectifs limités, que leur grande difficulté face à une présentation verbale du calcul arithmétique peut être surmontée par l'immersion dans une situation concrète et l'utilisation de tableaux, informatiques ou non
Mots clés : dyscalculie – innumérisme – problème arithmétique – énoncé verbal – tableur.

SUMMARY: ***Pupils with great difficulties in mathematics: are they dyscalculic and cannot they benefit from a teaching with tables and spreadsheets?***
The studies carried out by the OECD on the academic level of 15 year old students, in the 56, members or associates, do not give an identical and significantly high frequency of adolescents having difficulties in calculus, in all countries. Such an observation doesn't really confirm a potential neurological dysfunction – dyscalculia – universally and widely spread, from which those difficulties might have their origin.
Our teaching experience, from 2000 to 2008, with pupils having great difficulties, especially in calculus, leads us to a similar observation. The results of an experiment (N=10) confirm that their great difficulties, when they are given a verbal presentation of arithmetic calculus, can be overcome by actual experience and the use of tables, whether they are computerized or not.
Key words: *Dyscalculia – Low numeracy – Arithmetic problems – Verbal expression – Table.*

RESUMEN: ***Los alumnos con gran dificultad en matemáticas: ¿son discalcúlicos y pueden aprovecharse del cálculo con tablas y hojas de cálculo?***
Los estudios de la OCDE referentes a los niveles en alumnos de 15 años de los 56 países adheridos o asociados, no indican una frecuencia idéntica y significativamente alta de adolescentes con dificultad en cálculo en todos los países. Dicha observación no apoya mucho la hipótesis de que una disfunción neurológica – la discalculia – universal y ampliamente extendida, podría ser el origen de estas dificultades.
Nuestra experiencia en la enseñanza desde 2000 a 2008 en secciones del CAP, nos conduce a observaciones que pueden interpretarse de forma análoga. A estas secciones « reservadas » acceden principalmente alumnos que terminan 3º de la SEGPA con gran dificultad, especialmente en cálculo. Los resultados del seguimiento de una clase confirman, sobre unos efectivos limitados, que su gran dificultad frente a una presentación verbal del cálculo aritmético se puede superar mediante la inmersión en una situación concreta y el uso de tablas, ya sean o no informáticas.
Palabras clave: *discalculia – inumerismo – problema aritmético – enunciado verbal – hoja de cálculo.*

Le texte de base soulève deux questions auxquelles nos analyses des statistiques de l'OCDE et nos expérimentations et pratiques en classe de CAP (certificat d'aptitude professionnel) de lycée professionnel peuvent apporter des éléments de réponse : il s'agit, respectivement, de la question de la prévalence de la dyscalculie (et de son universalité) et de la question de la pertinence d'une méthode d'enseignement spécifique pour les élèves en grande difficulté en mathématique (et donc, possiblement, dyscalculiques). Même si ces deux questions sont clairement distinctes, il faut bien voir que, dans les milieux enseignants dont nous sommes issus, considérer la dyscalculie comme une maladie d'origine génétique conduit, à tort ou à raison, de nombreux enseignants à renoncer à enseigner dans ces classes ou, tout au moins, à renoncer à toute innovation devant des élèves qu'ils considèrent comme génétiquement inaptes aux apprentissages numériques. Il était donc important que notre expérimentation en classe soit, si ce n'est précédée, du moins accompagnée par une mise en évidence du fait que les enseignants ne sont pas nécessairement en face d'élèves qui appartiendraient aux incompressibles 6 %, à dyscalculie pathologique, souvent rapportés dans la littérature mondiale (cf. l'article de base).

RETROUVE-T-ON DES TRACES DE LA DYSCALCULIE DANS LES STATISTIQUES DE L'OCDE ?

Définition retenue pour la dyscalculie

Il convient, en premier lieu, de préciser la conception de la dyscalculie adoptée ici car il en existe de nombreuses. Legeay et Morel (2003, p. 19 et ss) en avaient ainsi recensé 72. La racine du terme « calcul », du latin calculi, petits cailloux, et dont l'origine remonte aux Sumériens qui utilisaient de petites boules d'argile pour compter, nous conduit à une définition simple, qui est celle rappelée dans l'article de base (p. 6), par référence à Brissiaud (2003, p.149) : « Calculer c'est mettre en relation des quantités, directement à partir de leurs représentations numériques ». En conséquence, la dyscalculie développementale pourrait alors se définir comme un trouble dans la manipulation des nombres et de leur mise en relation. Un tel trouble devrait apparaître dans un énoncé verbal simplifié demandant la mise en œuvre d'une seule opération mathématique parmi les quatre opérations de base. Ce critère est celui retenu pour les évaluations de l'OCDE, au plus bas niveau, sans préjuger de l'origine des lacunes des élèves.

Les « difficultés » en mathématiques selon l'OCDE

Le programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA), initié par l'OCDE en 2000, étudie pour la troisième fois le niveau des élèves de 15 ans des 30 pays de l'organisation et de 26 pays associés. La partie de ce rapport qui concerne directement ces questions est la partie 6 intitulée : « Profil de performance des élèves en compréhension de l'écrit et en mathématiques ». Concernant la compréhension de l'écrit, il est indiqué que : « Les résultats de compréhension de l'écrit sont présentés sur la base des 5 niveaux de compétence correspondant à des tâches d'une difficulté croissante. Ainsi les élèves qui n'atteignent pas le niveau 1, ne sont pas capables de mettre couramment en œuvre les savoirs et les savoir-faire les plus élémentaires » (PISA, 2006, p. 307).

Un exemple d'item de niveau 1 est présenté dans l'étude, question 1 de « l'unité basket » (p. 513). Il s'agit d'un QCM très simple où la bonne réponse figure dans l'introduction et est répétée plusieurs fois dans le corps du texte. Observons que cette approche ne préjuge pas du niveau de lecture qui peut être convenable chez les élèves qui n'atteignent pas le niveau 1 en compréhension de l'écrit.

L'échelle de culture mathématique se divise, elle aussi, en 6 niveaux de compétence (5 niveaux + celui en dessous du niveau 1). De la même façon, « les élèves qui n'atteignent pas le niveau 1, ne sont pas capables de mettre couramment en œuvre les savoirs et les savoir-faire les plus élémentaires » (PISA, 2006, p. 339).

Au niveau 1, il s'agit de petits énoncés comportant une phrase ou deux, de quelques lignes, y compris la question, dont la réponse met en jeu l'utilisation d'une seule des quatre opérations. Le rapport de l'OCDE (Taux de change, question 9, page 335) en fournit un exemple. Il s'agit de convertir des dollars de Singapour en rands sud-africains par une multiplication, le taux de change étant donné dans le sens direct (1 SGD = 4,2 ZAR); le rapport précise que cet «item s'inscrit dans le niveau 1, car il combine « contexte familier, question clairement énoncée et processus routinier ».

L'attribution du niveau inférieur au niveau 1 est fondée sur un échec à la moitié ou plus des items de niveau 1. A l'inverse, les élèves qui répondent correctement à plus de 50 % des items, sont, par définition de l'échelle d'attribution des niveaux, au niveau 1 et peuvent répondre à des questions qui s'inscrivent dans un contexte familier avec un énoncé explicite. Ces élèves, dans la majorité des cas, comprennent un énoncé simple et effectuent correctement l'opération unique qui en découle. Nous référant au critère défini précédemment, nous ne les considérons donc pas comme dyscalculiques.

Les résultats comparatifs entre pays

Nous analysons maintenant, dans le *tableau 1*, les données concernant les élèves qui se situent en dessous du niveau 1, à la fois pour la compréhension de l'écrit et pour la culture mathématique. Cette dernière se limite à la mise en œuvre des quatre opérations arithmétiques, compte tenu du peu de difficulté des items.

Pour construire le tableau 1, nous avons retenu uniquement les 34 premiers pays, les taux atteints par les suivants n'apportant rien de plus au débat. Quelques grands pays (par exemple les Etats-Unis) ne figurent pas dans ce classement pour ne pas avoir satisfait à toutes les règles d'évaluation. L'Azerbaïdjan, quant à lui, n'y figure pas car les résultats de ce pays sont atypiques : 10 % d'élèves sont au niveau 1, alors qu'aucun ne se situe en dessous du niveau 1. L'OCDE ayant étudié des échantillons de grande taille (plusieurs milliers d'élèves par pays) annonce une probabilité de confiance de l'ordre de 95 % aux enquêtes sur l'ensemble d'une population. Enfin, les dépenses annuelles par état, en kilodollars US, sont indiquées dans les colonnes droites du tableau (d'après l'OCDE, 2008, pp. 216 et 220).

Elèves en grande difficulté (en dessous du niveau 1)				**Dépenses annuelles par élève, en équivalents kUSD (2005)**	
Rang	**Pays**	**Culture mathématique**	**Compréhension de l' écrit**	**primaire**	**collège**
1	Finlande	1,1	0,8	5,6	8,9
2	Corée	2,3	1,4	ND*	ND*
3	Pays-Bas	2,4	5,2	6,3	8,2
4	Macao	2,6	2,9	ND*	ND*
5	Estonie	2,7	3,4	3,4	3,8
6	Canada	2,8	3,4	ND*	ND*
7	Hong-Kong	2,9	1,3	4,8	5,8
8	Australie	3,3	3,8	6,0	7,9
9	Danemark	3,6	4,5	8,5	8,6
10	Taipei	3,6	3,8	ND*	ND*
11	Japon	3,9	6,7	6,7	7,6
12	Liechtenstein	4,0	4,9	ND*	ND*
13	Nouvelle-Zélande	4,0	4,7	4,8	5,2
14	Irlande	4,1	3,2	5,7	7,4
15	Slovénie	4,6	4,4	ND*	8,0
16	Suisse	4,6	5,3	8,5	9,8
17	Islande	5,1	7,1	9,3	9,0
18	Suède	5,4	5,0	7,5	8,1
19	Pologne	5,7	5,0	3,3	3,0
20	Royaume Uni	5,9	6,8	6,4	7,2
21	Lettonie	6,4	6,0	ND*	ND*
22	Hongrie	6,7	6,6	4,4	4,0
23	Belgique	7,1	8,6	6,6	7,7
23	Tchéquie	7,2	9,9	2,8	4,9
24	Allemagne	7,3	8,3	5,0	6,2
25	Norvège	7,3	8,4	9,0	9,7
26	Autriche	7,5	8,4	8,3	9,5
27	Lituanie	7,8	8,7	ND*	ND*
28	Slovaquie	8,1	11,2	2,8	2,4
29	Luxembourg	8,3	8,6	14,1	18,8
30	France	8,4	8,5	5,4	7,9
31	Espagne	8,6	8,7	5,5	7,2
32	Russie	9,1	13,6	ND*	1,7
33	Croatie	9,3	6,2	ND*	ND*
34	Portugal	12,0	9,3	4,9	6,6

(*) ND : non disponible

Extraits des tableaux de PISA (2006, pp. 308 et 338) et OCDE (2008, pp. 216 et 220), conformément à l'autorisation de reproduction qui nous a été délivrée par l'OCDE le 12 février 2009.

Tableau 1. Pourcentage d'élèves n'atteignant pas le niveau 1 de culture mathématique et compréhension de l'écrit

Les commentaires

La proportion d'élèves en difficulté en mathématiques, est très faible dans 11 pays (en dessous de 4 %) et faible pour 11 pays supplémentaires (entre 4 et 7 %) ; un peu plus de la moitié des 56 pays étudiés (dont la France) ont un pourcentage d'élèves en grande difficulté supérieurs à 7 %. Dans la perspective d'une discussion de l'universalité de la dyscalculie développementale (DD), le *tableau 1* est difficilement compatible avec l'hypothèse qu'une DD, également et universellement distribuée, serait à l'origine de ces grandes difficultés en calcul. En effet, on voit mal ce qui justifierait la grande variété des proportions d'élèves en grande difficulté en calcul : de 1 à 12 % dans le tableau 1. Par ailleurs, si la DD conduisait inéluctablement à une grande difficulté en mathématiques, sa prévalence serait majorée par le plus petit pourcentage obtenu dans un pays, à savoir 1.1 % (en Finlande).

Les proportions d'élèves en grande difficulté en compréhension de l'écrit sont très proches des précédents. Au demeurant, la corrélation (r de Pearson) entre ces deux pourcentages est très forte ($r = .850$) et significative ($p < .0001$). Pour un tiers environ des pays ces résultats sont légèrement inférieurs à ceux portant sur la culture mathématique ; ceci est cohérent avec le fait que, un élève échouant à décrypter correctement un énoncé n'est pas à même de choisir la bonne opération arithmétique en connaissance de cause. Les lacunes en calcul s'ajoutent donc à celles en lecture-compréhension.

Pour les deux tiers restants, c'est l'ordre inverse : cela voudrait-il dire que le choix semi-aléatoire, par l'élève, d'un calcul plutôt qu'un autre, améliore le résultat de temps à autre ? D'une part, nous constatons effectivement, en classe, ce type de comportement (Vigier, 2008, p. 12) ; d'autre part, Silver (1986, p. 192) a pu souligner l'existence de « règles » (*e.g.*, « si on est en présence de deux nombres dont l'un est beaucoup plus grand que l'autre, il faut probablement diviser ») permettant aux élèves de choisir l'opération, souvent correctement, sans procéder à une analyse sémantique approfondie de l'énoncé.

Enfin, l'hypothèse que des crédits supplémentaires injectés dans l'enseignement réduiraient le pourcentage d'élèves en grande difficulté en mathématiques, et donc possiblement de dyscalculies, ne se confirme pas avec le présent échantillon de pays (restreint à ceux pour lesquels la dépense annuelle par élève est disponible). Les deux coefficients de corrélation (par rangs : rho de Spearman) – de la culture mathématique avec les dépenses annuelles par élève en primaire et au collège – sont certes négatifs (p = -0.031 et -0.144, respectivement), mais ne diffèrent pas significativement de 0 ($p > .40$ dans les deux cas). On ne peut donc attribuer un rôle déterminant au facteur financier qui aurait pour effet de gommer dans certains pays un phénomène subsistant dans d'autres.

Conclusion et perspective

Ainsi, on retrouve peu d'éléments confortant l'hypothèse d'une pathologie universellement distribuée (appelée DD) dans les évaluations de l'OCDE ; ceci implique que les élèves en grande difficulté sont potentiellement capables de bénéficier d'un enseignement. A l'évidence, les méthodes traditionnelles d'enseignement ne sont pas adaptées. Mais pourraient-ils bénéficier d'un enseignement fondé sur l'usage de l'outil informatique, le tableur plus précisément ? C'est l'objet des expérimentations que nous avons menées durant 8 ans dans des classes de CAP d'un lycée professionnel. La deuxième partie de cette contribution est consacrée à une synthèse de nos recherches sur cette question.

UNE APPROCHE DU CALCUL PAR TABLEAUX ET TABLEURS

Description de la population étudiée

Les observations recueillies l'ont été dans le cadre de notre enseignement au lycée professionnel de Chasseneuil en

Charente, durant les années 2000 à 2008, auprès d'une dizaine de classes de CAP regroupant entre 10 et 15 élèves chacune. Ces élèves, de 15-16 ans, auxquels nous nous intéressons dans la présente partie, sont en très grande majorité des filles. Ces sections, « réservées », reçoivent principalement des élèves sortant de 3e SEGP[1]. Leur origine socio-économique est très homogène (milieu défavorisé, foyer monoparental…).

De par leur origine (SEGPA) et leur orientation dans ces classes de CAP, on sait que ces élèves sont plutôt en échec scolaire à leur entrée en lycée professionnel. Les SEGPA et les autres dispositifs d'enseignement adapté ou spécialisé ne représentent en effet que 3.7 % des effectifs du niveau collège en 2005-2006 (source : Education nationale). Il est donc probable que ces élèves appartiendraient aux 8.4 % d'élèves en grande difficulté en calcul tels qu'ils ont été définis et rapportés par l'OCDE pour la France (voir *tableau 1*). D'ailleurs, nous avons pu vérifier en 2006, 2007 et 2008, qu'ils n'obtiendraient pas la moyenne aux items de premier niveau en compréhension de l'écrit et en culture mathématique (Vigier, 2008, pp. 24-28). Nous relevons que toutes les élèves (ces années-là, uniquement des filles) méconnaissent la technique opératoire des quatre opérations arithmétiques. Bien que nous n'ayons pas eu accès aux dossiers correspondants, nous croyons savoir que, précédemment, en SEGPA, ils ont obtenu, aux tests de QI, un score supérieur à 80. Cela suggère donc un pattern de dyscalculie, même si nous préférons en général parler d'innumérisme, analogue à l'illettrisme dans le domaine de l'arithmétique (d'après Dehaene, 2003, p. 187).

Cette situation n'est pas liée à une déficience en lecture dont le niveau est, en général, suffisant, voire convenable. Mais la distinction doit être faite entre la lecture et la compréhension. Ces élèves ont « su » et « compris » à un moment donné de leur scolarité, mais ils ont oublié : en fin de SEGPA, un livret de compétences, remis à l'élève, l'indique. Une démarche, qui leur serait plus accessible, pourrait-elle favoriser la compréhension et la réalisation de calculs simples de base ou les résolutions des problèmes arithmétiques quotidiens ?

Les causes des difficultés

Comme le suggère l'origine socio-culturelle de nos élèves, l'échec scolaire en calcul pourrait être lié au déficit culturel et, notamment, à la compréhension de l'écrit. Cette hypothèse du déficit culturel chez nos élèves peut être étayée par l'observation du problème verbal suivant : «Vous utilisez 30 g de poudre, pour laver 12 kg de linge. Quelle est la quantité de poudre utilisée pour chaque kilogramme de linge ?» Plusieurs élèves ont indiqué ne pas comprendre la question. Ces élèves, en fait, associaient « chaque » et la quantité 12 kg, comme, dans l'exemple : « chaque élève a un cartable (tous les élèves ont un cartable), il y a donc 500 cartables dans le lycée ».

Nous avons cherché à prendre en compte le déficit culturel des élèves dans la construction des énoncés qui leurs sont proposés. Ce déficit peut les conduire à des interprétations inappropriées alors que notre propre capital culturel nous fait considérer comme élémentaire un texte qui, pourtant, contient des ambiguïtés lexicales. Ainsi, de manière plus générale les énoncés devraient décrire de façon très précise et explicite, les situations ; mais les textes seraient alors trop longs et deviendraient inaccessibles à ces élèves. Une deuxième cause potentielle d'échec est le « blocage » devant un énoncé verbal. Il est souvent décrit par les enseignants, comme une grande émotion, qui aboutit à un blocage de la pensée, du raisonnement. Enfin, la calculatrice dite de poche, ne porte-elle pas, elle aussi, une responsabilité dans les faiblesses en calcul constatées de nos élèves ? Ne devrait-elle pas être utilisée que ponctuellement voire exceptionnellement, par ces mêmes élèves ? La résolution du célèbre problème, proposé par Stella Baruk, où apparaissent des chèvres et des moutons et où l'on demande l'âge du capitaine du bateau semble surprendre Dehaene (2003, p. 188). Nos élèves en grande difficulté en calcul, avec l'aide d'une calculatrice, donnent, sans hésitation, non seulement une réponse, mais plusieurs à la suite. Le hasard semble prévaloir et les erreurs de frappe fréquentes augmentent encore la probabilité d'un résultat erroné.

…et la pédagogie mise en œuvre pour les surmonter

Afin de limiter les difficultés d'interprétation des énoncés, la *Nouvelle Méthode de lecture* (Gillardin, 2003) appliquée aux énoncés de problèmes mathématiques, nous a suggéré une présentation des énoncés de problèmes arithmétiques. Ainsi, nous avons privilégié le choix d'un énoncé simple de la vie du lycéen ou du milieu professionnel (e.g., le lavage du linge à l'atelier). A partir de cet énoncé, il est possible de balayer tout le programme avec des exercices tous liés à l'énoncé de départ. Chaque étude pouvant prendre plusieurs semaines, la situation devient alors familière. Sur une scolarité de deux ans, seules quelques situations sont donc étudiées. Ces situations sont, en fait, celles que l'ancien élève rencontre dans sa vie ou dans le monde professionnel. Il s'agit bien de situations réelles et non de situations représentées (faire comme si…), car avec ces élèves, pour dénombrer des moutons, il faut des moutons et non pas des jetons !

Pour surmonter les difficultés précédemment repérées, attribuables à un déficit de compréhension de l'écrit, nous proposons aux élèves des techniques de lecture-compréhension fondées sur l'explicitation des éléments pertinents et favorisant la construction d'une interprétation adéquate de l'énoncé. L'énoncé est découpé en « micro-schémas » (Fayol, Thévenot et Devidal, 2005, p. 17), que nous nommons, plus simplement, pour les élèves, « idée n°1 », « idée n°2 », etc.,

[1] Section d'Enseignement Général Professionnel et Adapté.

par des soulignements et des encadrements colorés. Pour repérer la première idée, la grandeur est soulignée, par exemple, en vert et le (ou les) nombre(s) mesurant la (ou les) quantité(s) correspondante(s), est (ou sont) encadré (s) en vert; idem pour la deuxième idée, si elle existe, en bleu cette fois. Dans la question, le « mot-clé » (la grandeur recherchée), correspondant à l'un ou à l'autre des micro-schémas, est soulignée en rouge pour en prendre connaissance (voir le *tableau 2*). Cette technique aide à la compréhension de l'énoncé et peut aussi contribuer à dépasser, en mobilisant l'attention par des manipulations de couleurs, le blocage observé chez certains élèves.

Enfin, si nous rejetons l'usage de la calculette, quel outil utiliser ? L'*Histoire des mathématiques* nous suggère une solution. Rouse Ball (1906, p. 137), qui en est l'auteur, écrit en effet : « Il n'est pas douteux que les résultats étaient obtenus tout d'abord avec l'aide d'un abaque - table de calcul antique, recouverte de sable - et que les signes (romains ou grecs) n'étaient usités que pour conserver trace des résultats. » Le tableur est notre abaque moderne : l'un comme l'autre permettent de faire des calculs et des tableaux, de les modifier, de les automatiser ou de les effacer. Le transfert de l'énoncé verbal du papier vers la structure plus formelle et plus explicite du tableau informatique favorise un effort de concentration et de compréhension. L'écriture des mots et des nombres, les liens entre données permettent de satisfaire la recommandation de Baruk (2003, pp. 25-48), de bien différencier les grandeurs et les nombres ; nous ajoutons à sa liste, et les chiffres, et les numéros, et les quantités, et les mesures, et les unités. Le support papier conserve seulement la trace du résultat, en retour, comme dans l'antiquité, mais avec un avantage, le fichier du tableur peut être sauvegardé pour une analyse ultérieure.

Le tableur constitue un mode de représentation intermédiaire entre la formulation verbale et la situation réelle : il permet une coordination de ces différents schémas, le transfert des données ainsi que la réécriture, comme sur un brouillon moderne (cf. Vigier, 2008, annexe : « exemple tableur élève C » ou « exemple tableur M »). Tisser des liens entre la mécanique du calcul et le sens, et bien distinguer les grandeurs, les quantités, les mesures, les unités et les nombres est une caractéristique essentielle des tableaux. Les couleurs des micro-schémas sont reprises sur l'écran.

Tableau 2. Les étapes de la résolution de problèmes arithmétiques avec énoncé

<table>
<tr><td colspan="2">Lecture-compréhension</td><td colspan="2">Raisonnement</td></tr>
<tr><td>1) Informations</td><td>2) Question</td><td>3) Tableaux</td><td>4) Calcul</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1a) Organiser les micro-schémas
*idée n°1
*idée n°2
…………..

1b) Données numériques

Nombre + unité
(idée n°1)

Nombre + unité
(idée n°2)
……………..</td><td rowspan="2">Mot clé</td><td>Désignation valeurs numériques<table><tr><td>Grandeur (unités)</td><td>Nombre</td><td>Nombre</td><td>x = ?</td></tr></table></td><td>* Tableau additif
……………
* dD…………</td></tr>
<tr><td>Désignation Valeurs numériques<table><tr><td>Grandeur (unités)</td><td>Nombre</td><td>Nombre</td></tr><tr><td>Grandeur (unités)</td><td>Nombre</td><td>x = ?</td></tr></table>(ou nombre de ...)</td><td>* Tableau de proportionnalité
……..………</td></tr>
</table>

L'exemple de la proportionnalité

Si l'on s'intéresse aux méthodes de calcul de tous ceux qui ne connaissent pas notre façon de faire, à savoir les quatre opérations héritées des mathématiciens du Moyen Age, on découvre qu'ils peuvent mettre en œuvre des habiletés liées à la proportionnalité et aux tableaux et qui ont été utilisées depuis des temps lointains. Par exemple, nous avons observé les techniques particulières des vendeuses des marchés africains qui font le commerce, aujourd'hui encore pour certaines, de leurs produits, sans calculatrice et sans connaître ni la multiplication, ni la division. Prenons le cas d'une vendeuse de tomates rencontrée en Afrique dans les années 80. Elle disposait sur son étal des marchandises sous forme de tas réguliers (*e.g.,* 8 tas de 5 tomates chacun). Elle connaît son prix d'achat global, la marge absolue souhaitée et donc le prix de vente total (e.g. 1600 FCFA). Par essais successifs et par des habiletés développées dans son activité, elle calcule le prix de vente d'un petit tas. En Européens habitués à la vente au kilogramme et à ses sous-multiples décimaux, nous pouvons nous demander comment elle ferait si nous voulions, par exemple, douze tomates. Notre vendeuse, tout naturellement, reconstruirait des tas de 4, par exemple, pour satisfaire notre demande en servant 3 tas. Mais comment trouve-t-elle le prix ? Son tableau virtuel de 5 tomates à 200 FCFA, et de 40 tomates à 1600 FCFA s'est complété d'une autre colonne. Probablement par essai/erreur, elle a pu établir le prix d'un tas de 4 (elle dispose alors, de visu, sur son étal de 10 tas égaux; les essais successifs par addition sont alors très faciles pour déterminer le prix d'un tas). Par addition, elle a alors pu en déduire le prix de 12 (4 + 4 + 4) tomates, soit 480 (160 + 160 + 160) FCFA ! Cette reconstruction ne lui demande que quelques secondes. S'agissant d'habiletés développées individuellement, les autres possibilités de calcul sont, bien sûr, nombreuses. Ce sont des procédures informelles, certes, mais elles exploitent la propriété additive de la fonction linéaire; les approximations lorsque le dernier tas ne tombe pas juste ne changent rien. Surtout, pas besoin de multiplication, ni de division, la manipulation experte des propriétés des tableaux de proportionnalité, connus de tous de façon empirique, et notamment des commerçants, depuis la nuit des temps, suffit !

La méthode des tableaux

Trois présentations de tableaux peuvent être distinguées.
Une présentation verticale (ou horizontale dans certains cas) des données devant être additionnées, en une seule colonne (ou une seule ligne).
Une présentation horizontale en une seule ligne (voir le *tableau 2*), pour les problèmes de distance, d'écart, de durée, de situations chronologiques, etc. qui sont résolus par une soustraction. Dans ces deux premiers cas, la représentation sur un axe vertical ou horizontal peut expliciter le problème en apportant l'ordre de grandeur visuel.
Enfin, une présentation horizontale sur deux lignes pour les tableaux de proportionnalité.
Ces tableaux ont, eux-mêmes, deux formes : le tableau non limité en nombre de colonnes, construit par additions successives (voir le *tableau 3a*) et le tableau dit « produit en croix » (voir les *tableaux 2 et 3b*).
Prenons l'exemple de la recette de la galette « frangipane », qui est le travail d'une élève sur tableur, effectué dans le cadre d'un compte rendu de stage effectué dans une maison de retraite de 72 résidents. Nous pouvons nous en inspirer pour compléter les tableaux correspondant à un seul ingrédient (voir le *tableau 3*).

Tableau 3. Tableaux de proportionnalité associé au problème de la recette*.

a) Construit par additions successives

Nombre de personnes	1	2	4	8	16	32	40	64	72
Quantité de beurre (en g)	12,5	25	50	100	200	400	500	800	900

b) Construits par produit en croix

b1) Quantité pour **40** personnes

Nombre de personnes	8	40
Quantité de beurre (en g)	100	500

b2) Quantité pour **1** personne

Nombre de personnes	8	1
Quantité de beurre (en g)	100	12,5

b3) Quantité pour **5** personnes

Nombre de personnes	1	5
Quantité de beurre (en g)	12,5	62,5

* En vert, les données numériques de départ, en rouge les valeurs calculées au tableur, en orange les valeurs obtenues par calcul mental additif et essais successifs.

La donnée numérique de départ est la quantité qui correspond à 8 personnes, soit 100 (g) de beurre ; l'élève construit les colonnes suivantes par additivité en conservant une liberté de choix dans le mode de décomposition des valeurs (72 = 64 + 8 ou 72 = 40 + 32).
Pour les élèves, tout est simplissime dans ces calculs où l'on ne parle que d'addition (40 = 32 + 8; 4 est le nombre qui permet d'obtenir 8 en l'additionnant à lui-même, après d'éventuels essais successifs; l'écart entre 32 et 72 est obtenu par addition « à trou », ou par la méthode du « rendu de monnaie »...). Ce faisant, nous revenons aux processus du « *calcul machine* » où les compteurs s'incrémentent, là, grâce aux doigts des élèves. Nous retrouvons aussi le mode de fonctionnement de notre vendeuse africaine, et les modes de calcul pratiqués dans l'Egypte antique avec, bien sûr, pour nous, le renfort de l'informatique.
Les possibilités offertes par les tableaux additifs sont complétées rapidement par l'utilisation des touches moins « - », étoile « * » et barre de fraction « / ». Pour calculer une distance les élèves utilisent la touche « - ». Mais cela reste la difficulté la plus importante car les élèves cliquent spontanément sur la cellule de départ en premier, ce qui, au tableur, aboutit à une erreur de signe. Ils sont dans la logique du choix des nombres romains IV et IX (distance de I à V = 4 et distance de I à X = 9); le « retour en arrière » est difficile car, « naturellement » et mentalement, nos élèves calculent une distance … en comptant sur leurs doigts (cf. Vigier, 2008, p 11) ! Le signe «-», rappelant le segment en géométrie, correspond bien, cependant, dans leur esprit, à un calcul de distance.

Pour le tableau de proportionnalité, version compacte à trois colonnes du tableau additif, la démarche est plus simple. Ce type de tableau est prisé par tous les élèves, même ceux en grande difficulté en calcul : les signes du clavier numérique, * et /, sont appelés dans le bon ordre pour les opérations correspondantes, sans toutefois être associés immédiatement à la multiplication et à la division (symboles x et :); ce choix, * ou /, renvoie, dans leur esprit, à une instruction machine destinée à réduire le tableau additif, ce qui est le cas, et l'α (alpha), moyen mnémotechnique de se souvenir de l'ordre des instructions, est correctement utilisé sans aucune hésitation. La version visuelle dispense ainsi de faire appel à la règle de trois et à son énoncé verbal. Ces tableaux permettent la résolution de tous les problèmes liés à une situation linéaire (de proportionnalité) et, donc, la multiplication et la division en deviennent des cas particuliers, lorsque l'un des nombres appelé est le neutre (1) de l'une de ces deux opérations. L'extension aux situations affines se fait immédiatement par ajout d'une nouvelle donnée au résultat. En pratique, les calculs sont effectués en allant chercher les données numériques dans la bonne cellule du tableur, les liens deviennent clairs et les automatismes s'installent (produit en croix, …). Chaque tableau est présenté avec un titre et une conclusion. Le retour sur la feuille papier peut alors s'effectuer. Il s'agit bien d'une construction proche de la réalité (*e.g.,* l'étal de la vendeuse africaine), faisant apparaître les grandeurs, les unités, les nombres et les mesures et non d'une abstraction avec manipulation de nombres et d'opérateurs sans lien avec le réel.
L'expérience montre cependant qu'un retour aux notions de multiplication, division et soustraction, sous la forme qui leur est enseignée depuis des années, s'effectue, assez facilement, au bout de quelques semaines : il n'y a plus de mystère! (cf. Vigier, 2008, pp. 30-32).

Résultats et commentaires de l'expérimentation dans une classe

Le *tableau 4* regroupe les résultats des évaluations successives auxquelles nous avons procédé au cours de l'année scolaire 2007-2008 dans une classe de 13 élèves, dont 10 étaient présents à toutes les évaluations. Le sujet d'étude est une situation de l'atelier de lavage du linge où l'élève manipule et pèse linge et poudre à laver pour choisir un dosage conforme à la fiche technique du fabricant de détergent (sous forme de tableau figurant sur l'emballage).
Les différentes évaluations auxquelles nous avons procédé, bien que non identiques, sont suffisamment similaires pour pouvoir en comparer les résultats. Hormis les exercices de positionnement et la découverte du tableur, en début d'année, ce travail a été poursuivi pendant 5 semaines à raison de 2 heures par semaine.

Date	Type d'évaluation	Note moyenne de classe (/20)	Ecart type
06/09/07	Calcul avec énoncé seul (positionnement)	11,75	5,28
23/10/07	Calcul avec énoncé seul (évolution)	18,50	3,37
12/11/07	Calcul avec énoncé seul (évolution)	16,50	5,43
29/04/08	Calcul avec énoncé seul (évolution)	12,50	5,89
05/05/08	Calcul avec énoncé et tableur	16,50	4,74
23/05/08	Calcul avec énoncé et tableur à l'atelier	19,00	2,11

Tableau 4. Performance de la classe en fonction de la date de l'évaluation.

Dans le *tableau 4*, nous pouvons vérifier que les résultats progressent lorsque les évaluations ne font pas suite à des vacances (de Toussaint pour l'évaluation du 12/11) ou à la longue période d'interruption des évaluations entre le 12/11 et le 29/04 (qui inclut non seulement trois périodes de vacances, mais aussi des stages). Les élèves ont progressé significativement entre le 06/9 et le 23/10 ($p < .01$)[2]. Nous l'expliquons par les nombreux exercices sur feuille et au tableur qui se sont succédé au cours de la première moitié du premier trimestre. L'interruption volontaire, de plusieurs mois, des évaluations sur le mode verbal a presque conduit à l'effacement complet des progrès lors de l'évaluation du 29/04. Le 5/05, pour le même type d'exercice, sans préparation particulière avec, cette fois, le tableur, la note moyenne remonte (non significativement : $p > .10$) à 16,50. Enfin, le 23/05, le même type d'exercices avec énoncé, tableur et dans l'environnement de l'atelier décrit précédemment, permet aux élèves d'améliorer encore une fois (non significativement : $p > .10$) leur moyenne et ainsi d'obtenir la note moyenne la meilleure de l'année. Le progrès entre la première et la dernière évaluation est fortement significatif ($p < .01$).
Les quatre premières évaluations correspondent à des situations verbales (énoncé seul) : les progrès sont rapides mais semblent fragiles et sensibles à l'oubli. La cinquième évaluation, faisant intervenir le tableur, confirme que nous sommes dans une situation explicitée et que la méthode est convenablement enregistrée et mémorisée. La sixième évaluation montre que la situation réelle est la plus favorable à la résolution des problèmes arithmétiques. Malheureusement nous n'avons pas pu mesurer la persistance des progrès, ce qui a été constaté, malgré tout, de façon informelle.
La méthode au tableur et dans l'environnement de l'atelier est bien perçue par les élèves qui affirment souvent, comme C.R. et L.B. : « Je comprends mieux au tableur que sur feuille» ; « Pourquoi on n'apprend pas comme ça à l'école (sous-entendu 'avant)'?».
La situation unique avec des exercices déclinés pendant plusieurs semaines peut, cependant, conduire à une lassitude des élèves (« encore les machines à laver !»). Mais, nous sommes dans le cadre d'une formation professionnelle où les activités sont spécialisées, c'est donc la règle et elle est facilement acceptée après une courte explication.
Avec Bourdieu (1970) nous dirons que l'enseignement classique ne convient plus à ces élèves. La pédagogie du professeur de mathématiques avec l'idée d'une discipline verbale, enseignée au « tableau noir » ou même au « tableau interactif », n'est peut-être plus adaptée ; il convient, vraisemblablement, de sortir de l'allusif et d'entrer dès que c'est possible dans le réel, dans « leur vraie vie », avec leurs mots.

[2] La distribution non normale des notes nous a conduit à utiliser un test (Wilcoxon, pairé) non paramétrique. Le test a été pratiqué bilatéralement.

CONCLUSION

Des milliers d'adolescents attendent, en France notamment, pour aborder leur vie professionnelle sans ce fameux « complexe mathématique », qui subsiste souvent à l'âge adulte. Nos premiers résultats, sur des effectifs réduits, sont porteurs d'espoir. Ils permettent de penser que la très grande majorité des élèves de CAP, en grande difficulté en calcul, et possiblement dyscalculiques, peuvent accéder à certains apprentissages numériques. Plus précisément, avec une méthode nouvelle, limitant la part verbale, explicitant les situations par le biais du tableur et de l'atelier, nous pensons qu'ils peuvent arriver à réaliser les calculs courants de la vie de tous les jours, aussi bien dans la partie privée que dans la partie professionnelle.

REFERENCES

BARUK (S.)*Comptes pour petits et grands,* V1, Paris, Magnard, 2003.

BOURDIEU (P.). *La reproduction : éléments d'une théorie du système d'enseignement*, Paris, éditions de Minuit, 1970.

DEHAENE (S.) *La bosse des maths*, Paris, Odile Jacob, 2003.

FAYOL (M.), THEVENOT (C.) ET DEVIDAL (M.). Résolution de problème / Résolution de problèmes arithmétiques. In M-P. Noël (Ed.), *Approche neuropsychologique et développementale des difficultés de calcul chez l'enfant*. Marseille, Solal, 2005, pp. 17-25.

Gillardin (B.). Apprentissage de la lecture et de l'écriture pour les adultes en difficulté, Méthode d'apprentissage de la lecture, adultes immigrés. Paris, Retz, 2003.

LEGEAY (M.-P.) et MOREL (L.). Différentes définitions de la dyscalculie, liées à des champs théoriques, *L'Orthophoniste*, 227, 2003, pp. 19-26.

OCDE Regards sur l'éducation 2008 : les indicateurs de l'OCDE, secrétariat général de l'OCDE. Retrouvé, en janvier 2009, à l'adresse : www.oecd.org/edu/rse2008

PISA. *Les compétences en sciences, un atout pour réussir.* Programme international pour le suivi des acquis des élèves, 2006. Retrouvé, en janvier 2009, à l'adresse : www.oecd.org/pisa

ROUSE BALL (W.W.), 1906. *Histoire des mathématiques, T1 : Les mathématiques dans l'Antiquité, au Moyen Age et pendant la Renaissance ; T2 : Les mathématiques modernes de Descartes à Huygens,* Paris, Editions Jacques Gabay, 1906. (1ère édition en anglais, consulté dans la présente édition française de 2005).

SILVER (E.A.). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed), *Conceptual and procedural knowledge:* The case of mathematics, 1986, pp.181-198. Hillsdale, Erlbaum.

VIGIER (M.). Méthode des tableaux, 25 juin 2008. Retrouvable, en janvier 2009, à l'adresse : http://ww2.ac-poitiers.fr/meip/IMG/pdf/LP_PA_Chanbanne_Chasseneuil.pdf